

## Allgemeine Theorie des eutektischen Wachstums

Andreas Ludwig, Gießerei-Institut der RWTH Aachen

### Einführung

Die wohl bekannteste Arbeit zur Theorie des eutektischen Wachstums ist die klassische Arbeit von Jackson und Hunt (JH-Modell) [1]. Zur Bestimmung des lokalen Diffusionsfeldes vor einer ebenen eutektischen Front die mit einer konstanter Geschwindigkeit  $V$  wächst, schlugen sie einen Fourierreihen-Ansatz der Form

$$C(x, z) = C_\infty + B_0 e^{-2z/l_c} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2F_n z/l_c} \cos(2n\pi \frac{x}{\lambda_E}) \quad (1a)$$

$$\text{mit } F_n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2n\pi}{P_E} \right)^2} \right] \text{ für } P_E \neq 0 \quad (1b)$$

vor. Hier bezeichnet  $C_\infty$  die Ausgangskonzentration der Schmelze;  $l_c := 2D/V$  die Diffusionslänge;  $D$  den Diffusionskoeffizienten in der Schmelze;  $P_E := \lambda_E/l_c$  die Pécletzahl; und  $\lambda_E$  den mittleren Lamellenabstand. Das mitbewegte Koordinatensystem ist so gewählt, daß sich die ebene Front bei  $z = 0$  befindet. Dieser Ansatz erfüllt sowohl die Differentialgleichung als auch die Fernfeldbedingungen. Entsprechend den allgemeinen Eigenschaften von Fourierkoeffizienten bestimmten Jackson und Hunt die Koeffizienten  $B_n$  durch Multiplikation des Ansatzes (1a) und der beiden Flußbilanzen mit  $\cos(2n\pi x/\lambda_E)$  und anschließende Integration über ein Lamellenpaar. Dabei nahmen sie an, daß der Konzentrationssprung an der  $\alpha$ - bzw. der  $\beta$ -Lamelle  $\Delta C_{L,\alpha}$  bzw.  $\Delta C_{L,\beta}$  unabhängig vom Ort  $x$  ist und dem Löslichkeitsunterschied zwischen Festkörper und Schmelze bei der eutektischen Temperatur  $T_E$  entspricht:  $\Delta C_{L,\alpha} = \Delta C_\alpha^E$  bzw.  $\Delta C_{L,\beta} = \Delta C_\beta^E$ . Als weitere Einschränkung wird im JH-Modell angenommen, daß die Diffusionslänge groß gegen den Lamellenabstand des Eutektikums ist ( $l_c \gg \lambda_E$ ). Dies ist nur bei langsamen Erstarrungsprozessen gegeben.

Mit den errechneten Fourierkoeffizienten  $B_n$  bestimmten Jackson und Hunt die mittlere Schmelzenkonzentration an der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Lamelle. Unter Berücksichtigung der mittleren konstitutionellen und der mittleren kapillaren Unterkühlungen erhielten sie folgenden Ausdruck für die Abhängigkeit der mittleren Grenzflächenunterkühlung  $\overline{\Delta T_E}$  vom mittleren Lamellenabstand  $\lambda_E$  und der Erstarrungsgeschwindigkeit  $V$ :

$$\overline{\Delta T_E} = K_1 V \lambda_E \cdot P(f_\alpha, \Delta C_E) + \frac{K_2}{\lambda_E} \quad (2a)$$

$$\text{mit } K_1 := \frac{\bar{m}}{2D} \left( \frac{1}{f_\alpha} + \frac{1}{f_\beta} \right) \text{ und } K_2 := 2\bar{m} \left[ \frac{\Gamma_\alpha \sin \theta_\alpha}{f_\alpha |m_\alpha|} + \frac{\Gamma_\beta \sin \theta_\beta}{f_\beta |m_\beta|} \right] \quad (2b)$$

$$\text{sowie } \bar{m} := \frac{|m_\alpha| \cdot |m_\beta|}{|m_\alpha| + |m_\beta|} \text{ und } P(f_\alpha, \Delta C_E) := 2\Delta C_E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi f_\alpha)}{(n\pi)^3} \quad (2c)$$

Dabei bezeichnen  $m_\alpha$  bzw.  $m_\beta$  die Liquidussteigungen der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Phase bei  $T_E$ ,  $f_\alpha$  bzw.  $f_\beta$  die relativen Phasenanteile,  $\Gamma_\alpha$  bzw.  $\Gamma_\beta$  den jeweiligen Gibbs-Thomson-Koeffizienten, und  $\theta_\alpha$  bzw.  $\theta_\beta$  die

\* Entgegen der Originalarbeit von Jackson und Hunt [1] wurde hier der Faktor  $2\Delta C_E$  aus der Konstante  $K_1$  in die  $P$ -Funktion übernommen.

entsprechenden Tripelpunktswinkel.  $\Delta C_E := \Delta C_\alpha^E + \Delta C_\beta^E$  ist die Differenz der maximalen Löslichkeiten in der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Phase. Zur Festlegung des auftretenden Lamellenabstandes gingen Jackson und Hunt von der Gültigkeit des Prinzip der minimalen Unterkühlung aus. Durch Differenzieren und anschließendes Nullsetzen der Gleichung (2a) erhielten sie das Skalierungsgesetz des eutektischen Wachstum:

$$\lambda_E^2 V = \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{P(f_\alpha, \Delta C_E)}. \quad (3)$$

Schon zwei Jahre nach Jackson und Hunt veröffentlichten Donaghey und Tiller eine Arbeit, bei der die zwei vereinfachenden Annahmen des JH-Modells fallen gelassen wurden (DT-Modell) [2]. Donaghey und Tiller verwendeten den korrekten Ansatz für  $\Delta C_{L,\alpha}$  und  $\Delta C_{L,\beta}$ , also  $\Delta C_{L,\alpha}(x) = (1 - k_\alpha) C(x,0)$  und  $\Delta C_{L,\beta}(x) = (1 - k_\beta) (1 - C(x,0))$  und ließen damit eine Abhängigkeit der Größen  $\Delta C_{L,\alpha}$  und  $\Delta C_{L,\beta}$  von  $x$  explizit zu. Darüber hinaus verwendeten sie nicht die Näherung  $l_C \gg \lambda_E$ . Analog zum JH-Modell multiplizierten Donaghey und Tiller den Ansatz (1a) sowie die beiden Flußbilanzen mit  $\cos(2i\pi x/\lambda_E)$  und integrierten über ein Lamellenpaar. Damit erhielten sie das folgende unendliche lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten  $B_n$ :

$$(a_0 - F_0)B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k = b_0 - C_\infty a_0, \quad (4a)$$

$$a_n B_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_{2n} - F_n)B_n + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{2}(a_{n+k} + a_{n-k})B_k = b_n - C_\infty a_n \quad n \neq 0, \quad (4b)$$

$$\text{mit } a_0 := f_\alpha(1 - k_\alpha) + f_\beta(1 - k_\beta) \quad \text{bzw.} \quad b_0 := (1 - k_\beta)f_\beta \quad (4c)$$

$$\text{und } a_n := (k_\beta - k_\alpha) \frac{\sin(n\pi f_\alpha)}{n\pi} \quad \text{bzw.} \quad b_n := (k_\beta - 1) \frac{\sin(n\pi f_\alpha)}{n\pi} \quad n \neq 0. \quad (4d)$$

Die hier angegebenen Koeffizienten des Gleichungssystems unterscheiden sich geringfügig von den entsprechenden Koeffizienten in [2], da sich, wie auch schon von Trivedi und Mitautoren in [3] festgestellt wurde, in [2] einige Rechenfehler befinden. Donaghey und Tiller gaben in ihrer Arbeit nicht an, ob der Lösungsvektor eines endlichen Teilsystems der Dimension  $m$  für zunehmende  $m$  konvergiert, d.h. ob das unendliche Gleichungssystem (4a-d) überhaupt eine Lösung besitzt. Zudem fehlen die weiterführenden Schritte, die einen Zusammenhang zwischen  $V$ ,  $\lambda_E$  und  $\overline{\Delta T}_E$  in diesem verallgemeinerten Fall aufstellen.

Trivedi und Mitautoren untersuchten die Lösung des Gleichungssystem (4a-d) für den Spezialfall  $k_\alpha = k_\beta$ , also  $a_n \equiv 0$  (TMK-Modell) [3]. Sie zeigten, daß für diesen Fall eine zu Gleichung (2a) analoge Beziehung zwischen  $V$ ,  $\lambda_E$  und  $\overline{\Delta T}_E$  besteht und damit ein zu Gleichung (3) ähnliches Skalierungsgesetz für hohe Pécletzahlen gilt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine  $V$ - $\lambda_E$ - $\overline{\Delta T}_E$  Beziehung für den allgemeinen Fall (DT-Modell mit  $k_\alpha \neq k_\beta$ ) und daraus ein verallgemeinertes Skalierungsgesetz für das eutektische Wachstum aufgestellt. Darüber hinaus wird gezeigt, daß im allgemeinen das Gleichungssystem (4a-d) eine Lösung besitzt. Für den Fall eines extrem unsymmetrischen Phasendiagramm wird die Lösung vor dem Hintergrund der Ergebnisse des TMK-Modells für ein symmetrisches Phasendiagramm diskutiert.

### Allgemeine Theorie

Werden unter Benutzung des Fourierreihen-Ansatzes, Glg. (1a-b), die mittleren Schmelzekonzentrationen an der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Lamelle gebildet ohne die  $B_n$  explizit zu kennen, so ergibt sich

$$\overline{C}_{L,\alpha} = C_\infty + B_0 + P_E \frac{P(f_\alpha, P_E, k_\alpha, k_\beta, C_\infty)}{f_\alpha} \quad (5a)$$

$$\overline{C}_{L,\beta} = C_\infty + B_0 - P_E \frac{P(f_\alpha, P_E, k_\alpha, k_\beta, C_\infty)}{f_\beta} \quad (5b)$$

mit der verallgemeinerten  $P$ -Funktion

$$P(f_\alpha, P_E, k_\alpha, k_\beta, C_\infty) := \frac{1}{P_E} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \frac{\sin(n\pi f_\alpha)}{n\pi} \right] = \frac{(b_0 - C_\infty a_0) - (a_0 - F_0) B_0}{P_E (k_\beta - k_\alpha)}. \quad (5c)$$

Die Abhängigkeit der  $P$ -Funktion von den angegebenen Parametern ergibt sich aus den Koeffizienten des Gleichungssystems (4a-d). Das zweite Gleichheitszeichen gilt für  $k_\alpha \neq k_\beta$  und folgt aus Gleichung (4a). Daraus ergibt sich, daß die Konvergenz der Größe  $B_0$  bei sukzessiver Lösung von Teilsystemen der Dimension  $m$  zu einer eindeutigen Lösung des allgemeinen Problems führt.

Analog zum Vorgehen von Jackson und Hunt kann nun ein allgemeiner Zusammenhang zwischen  $\overline{\Delta T}_E$ ,  $\lambda_E$  und  $V$  aufgestellt werden:

$$\overline{\Delta T}_E = K_1 V \lambda_E \cdot P(f_\alpha, P_E, k_\alpha, k_\beta, C_\infty) + \frac{K_2}{\lambda_E}. \quad (6)$$

Diese Zusammenhang ist bis auf die Definition der  $P$ -Funktion identisch mit Gleichung (2a). Demnach ergibt sich auch ohne die explizite Kenntnis der  $B_n$  der gleiche funktionale Zusammenhang zwischen  $V$ ,  $\lambda_E$  und  $\overline{\Delta T}_E$  wie aus dem JH-Modell, nur daß nun die  $P$ -Funktion nicht von  $\Delta C_E$ , sondern von  $f_\alpha$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$  und  $C_\infty$  sowie zusätzlich auch von  $P_E$  und damit implizit von  $V$  und  $\lambda_E$  abhängt. Wird auf Gleichung (6) das Prinzip der minimalen Unterkühlung angewandt, so ergibt Differenzieren und anschließendes Nullsetzen das verallgemeinerte Skalierungsgesetz:

$$\lambda_E^2 V = \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda_E}. \quad (7)$$

### Ergebnisse

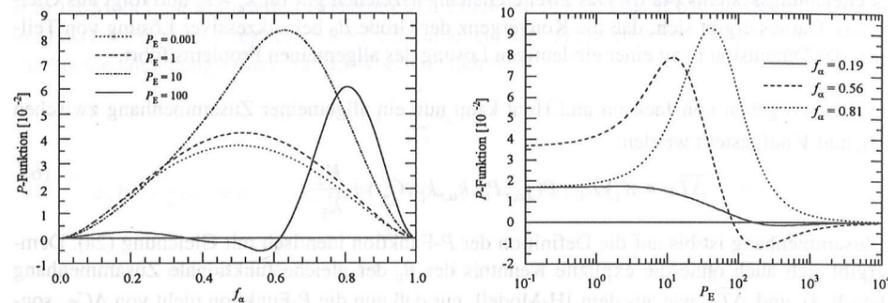
Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Konvergenzverhalten der allgemeinen  $P$ -Funktion durch Lösen eines endlichen Teilsystems der Dimension  $m$  des unendlichen Gleichungssystems (4a-d) untersucht. Dabei wurden unterschiedliche Parametersätze getestet. Im allgemeinen besitzen die Komponenten des Lösungsvektors ein gutes Konvergenzverhalten, was eine schnell konvergierende  $P$ -Funktion zur Folge hat. Schon bei endlichen Teilsystemen der Dimension  $m = 20$  ist eine Genauigkeit von  $< 0.1\%$  erreicht.

Mit Hilfe des Lösungsvektors eines endlichen Teilsystems der Dimension  $m = 50$  wurde nun die Abhängigkeit der  $P$ -Funktion von  $f_\alpha$ ,  $P_E$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$  und  $C_\infty$  untersucht. Zunächst sei auf den Spezialfall  $k_\alpha = k_\beta$  eingegangen (TMK-Modell). Mit  $k = 0.001$  konnte Bild 4a aus [3] und mit  $k = 0.999$  Bild 3a aus [3] reproduziert werden. Hier wird darauf hingewiesen, daß die  $P$ -Funktion des TMK-Modells mit  $2(1 - k)$  multipliziert werden muß, um auf den allgemeinen Ausdruck (5c) zu kommen<sup>#</sup>.

<sup>#</sup> Andererseits muß dann natürlich der dritte Term in den Gleichungen 5a-b mit dem selben Faktor multipliziert werden.

Entsprechend den Ausführungen in [3] geht die  $P$ -Funktion für kleine Pécletzahlen in die  $P$ -Funktion des JH-Modells über. Für  $k \neq 0$  durchläuft sie mit steigendem  $P_E$  ein Maximum, um sich anschließend asymptotisch dem Wert Null zu nähern. Betrachtet man das Produkt  $P_E \cdot P$  so geht dieses für große  $P_E$  asymptotisch gegen einen positiven Wert ungleich Null. Demnach ist für den symmetrischen Fall immer  $\bar{C}_{L,\alpha} > \bar{C}_{L,\beta}$  gegeben.

In Bild 1a ist der Verlauf der  $P$ -Funktion in Abhängigkeit von  $f_\alpha$  für  $k_\alpha = 0.001$ ,  $k_\beta = 0.9$  und  $C_\infty = 0.5$  sowie vier unterschiedliche Pécletzahlen ( $P_E = 0.001, 1, 10, 100$ ) gezeigt. Bei Variation von  $C_\infty$  bleiben die Kurvenformen in Bild 1a erhalten, allerdings steigt die Höhe der Kurven linear mit  $C_\infty$  (getestet  $C_\infty = 0.1, 0.5, 0.9$ ). Dies gilt auch für die Kurve mit  $P_E = 0.001$ . Da  $\Delta C_E = C_E \cdot (k_\beta - k_\alpha) + (1 - k_\beta)$  gilt, weist die in Glg. 2c definierte  $P$ -Funktion des JH-Modells für  $C_\infty = C_E$  die gleiche Abhängigkeit auf.

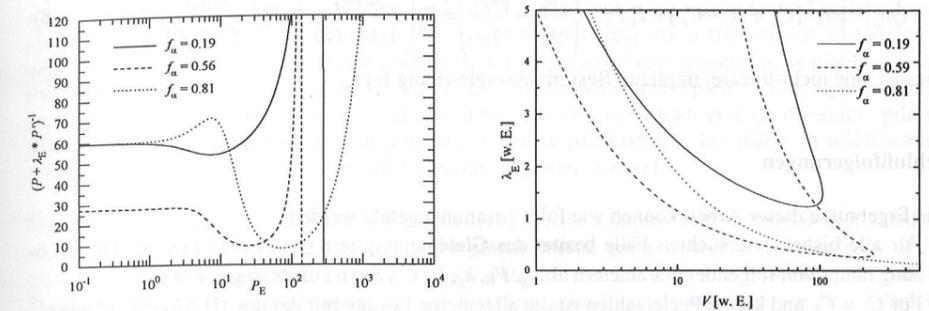


**Bild 1:** (a) Variation der  $P$ -Funktion mit  $f_\alpha$  für  $k_\alpha = 0.001$  und  $k_\beta = 0.9$ , wobei  $P_E = 0.001, 1, 10, 100$ . Bei Variation von  $C_\infty$  ändert sich nicht die Form der Kurven, sondern nur ihre Höhe (linear). (b) Verlauf der  $P$ -Funktion in Abhängigkeit von der Pécletzahl  $P_E$  für unterschiedliche  $f_\alpha$ . Der gewählte Wert von  $f_\alpha$  entspricht den drei Extrempunkten der durchgezogenen Linie in (a).

Bild 1b zeigt die  $P$ -Funktion in Abhängigkeit von  $P_E$  für die Werte von  $f_\alpha$ , bei denen die Kurve für  $P_E = 100$  in Bild 1a ein Minimum oder ein Maximum hat ( $f_\alpha = 0.19, 0.56, 0.89$ ). Für hinreichend große Werte von  $P_E$  geht die  $P$ -Funktion für alle  $f_\alpha$  asymptotisch gegen Null. Dabei durchläuft die  $P$ -Funktion mit steigendem  $P_E$  zunächst ein Maximum (wenn auch für  $f_\alpha = 0.19$  nicht sehr ausgeprägt) und nimmt dann monoton ab. Für niedrige und mittlere  $f_\alpha$  fällt die  $P$ -Funktion anschließend unter Null. Da entsprechend der Gleichungen (5a-b) die  $P$ -Funktion die mittlere Variation der Schmelzenkonzentration vor der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Lamelle beschreibt, bedeuten negative  $P$ -Funktionwerte eine Inversion der Konzentrationsverteilung, d.h. die mittlere Schmelzenkonzentration vor der  $\alpha$ -Phasen ist niedriger als die der  $\beta$ -Phase.

Trivedi und Mitautoren diskutierten für den von ihnen betrachteten Spezialfall die Auswirkung hoher Pécletzahlen auf den Wert der Größe  $\lambda_E^2 V$  [3]. Sie zeigten, daß diese Größe für kleine  $k = k_\alpha = k_\beta$  mit steigender Pécletzahl fällt, wogegen sie für große  $k$  steigt. Da nach Gleichung (7)  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  direkt proportional zu  $\lambda_E^2 V$  ist, ist zum Vergleich in Bild 2a der Verlauf der Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  als Funktion von  $P_E$  für die Werte von  $f_\alpha$ , bei denen die Kurve für  $P_E = 100$  in

Bild 1a ein Minimum oder ein Maximum hat ( $f_\alpha = 0.19, 0.56, 0.89$ ), dargestellt. Wie bisher sind die weiteren Größen  $C_\infty = 0.5$ ,  $k_\alpha = 0.001$  und  $k_\beta = 0.9$ . Wie schon für den Fall  $k_\alpha = k_\beta$  in [3] gezeigt, ist auch im allgemeinen Fall die Größe  $\lambda_E^2 V$  für hohe Pécletzahlen nicht mehr konstant. Für  $f_\alpha = 0.19$  und  $0.59$  sinkt der Wert der Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  zunächst für  $P_E > 1$ , um dann bei steigender Pécletzahl gegen Unendlich zu divergieren. Jenseits dieser Singularität sind die Werte für die Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  negativ und damit unphysikalisch. Die Singularität stellt also eine obere Grenze für das eutektische Wachstum dar. Sie liegt für  $f_\alpha = 0.19$  bei  $P_{E,\text{sing}} \approx 274$  und für  $f_\alpha = 0.59$  bei  $P_{E,\text{sing}} = 137$ . Für  $f_\alpha = 0.81$  verhält sich die Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  anders. Für  $P_E > 1$  steigt sie zunächst an, durchläuft dann nacheinander ein Maximum und ein Minimum, um dann ohne Begrenzung zu immer höheren Werten zu steigen.



**Bild 2:** (a) Verlauf der Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  (siehe Gleichung (7)) als Funktion der Pécletzahl  $P_E$  für unterschiedliche  $f_\alpha$ . Der gewählte Wert von  $f_\alpha$  entspricht den drei Extrempunkten der durchgezogenen Linie in Bild 1a. (b) Lamellenabstand als Funktion der Wachstumsgeschwindigkeit, beide in willkürlichen Einheiten, für  $f_\alpha = 0.19, 0.59, 0.81$ . Für  $f_\alpha = 0.19, 0.59$  besitzt das eutektische Wachstum eine obere Grenzgeschwindigkeit. Zudem ist die Relation zwischen  $V$  und  $\lambda_E$  für große  $V$  nicht mehr eindeutig. Demgegenüber ist das eutektische Wachstum für  $f_\alpha = 0.81$  nicht nach oben begrenzt.

Wird aus der Variation der Größe  $(P + \lambda_E \partial P / \partial \lambda)^{-1}$  mit  $P_E$  nach Gleichung (7) die Abhängigkeit des Lamellenabstandes  $\lambda_E$  von  $V$  hergeleitet, so ergibt sich Bild 2b. Dabei wurde der Quotient  $K_1 / K_2$  in Gleichungen (7) und der Faktor  $(2D)^{-1}$  in der Definition der Pécletzahl gleich eins gesetzt, und daher  $\lambda_E$  und  $V$  in willkürlichen Einheiten angegeben. Für  $f_\alpha = 0.19, 0.59$  existiert eine obere Grenzgeschwindigkeit für das eutektische Wachstum. Hier existieren bei hohen Geschwindigkeiten zwei Lösungen, eine mit geringem Lamellenabstand (niedrige Pécletzahl-Lösung) und eine mit großem Lamellenabstand (hohe Pécletzahl-Lösung). Für  $f_\alpha = 0.81$  existiert keine obere Grenzgeschwindigkeit und daher auch keine Doppeldeutigkeit für hohe Geschwindigkeiten.

Wie schon von Donaghey und Tiller [2] bemerkt, führt der allgemeine Ansatz und auch der von Trivedi und Mitautoren betrachtete Spezialfall  $k_\alpha = k_\beta$  [3], grundsätzlich zu der Schwierigkeit, daß, wenn von der Stofferhaltung zwischen der Schmelze bei  $z = \infty$  und dem entstehenden Festkörper ausgegangen wird, die Phasenanteile  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  nicht festzulegen sind. Dies gilt auch für das JH-Modell. Die gemittelten Konzentrationen im Festkörper müssen über eine Integration entlang der Erstarrungsfront bestimmt werden. Für den Fall, daß die Verteilungskoeffizienten  $k_\alpha$  und  $k_\beta$  sich nur

wenig mit der an der Front auftretenden Konzentration ändern, gilt  $\bar{C}_{s,\alpha} = k_\alpha \bar{C}_\alpha$  bzw.  $(1 - \bar{C}_{s,\beta}) = k_\beta (1 - \bar{C}_\beta)$ . Einsetzen in die Stoffhaltung,  $f_\alpha \bar{C}_{s,\alpha} + f_\beta \bar{C}_{s,\beta} = C_\infty$ , und Anwendung der Gleichungen (5a-b) für  $\bar{C}_{L,\alpha}$  und  $\bar{C}_{L,\beta}$  ergibt die erste Gleichung des Gleichungssystems (4a). Damit liefert die Stoffhaltung keine unabhängige Bestimmungsgleichung für  $f_\alpha$  bzw.  $f_\beta$ . Vielmehr ist sie über die Flußbilanz an der Phasengrenze und die Fernfeldbedingung schon implizit in den Modellen enthalten.

K. Kassner und C. Misbah wiesen darauf hin, daß sich der Phasenanteil  $f_\alpha$  aus der angenommenen Gleichheit der mittleren Unterkühlung ergibt [4]. Für den allgemeinen Fall folgt aus  $\overline{\Delta T}_\alpha = \overline{\Delta T}_\beta$

$$\left( |m_\alpha| + |m_\beta| \right) [C_\infty + B_0 - C_E] + P_E P(\dots) \left( \frac{|m_\alpha|}{f_\alpha} - \frac{|m_\beta|}{f_\beta} \right) = \Gamma_\beta \left( \frac{\sin \theta_\beta}{f_\beta (\lambda_E / 2)} \right) - \Gamma_\alpha \left( \frac{\sin \theta_\alpha}{f_\alpha (\lambda_E / 2)} \right). \quad (8)$$

Dies ist eine nicht-lineare, implizite Bestimmungsgleichung für  $f_\alpha$ .

### Schlußfolgerungen

Die Ergebnisse dieser Arbeit können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Für alle bisher untersuchten Fälle besitzt das Gleichungssystem (4a-d) eine Lösung. Diese Lösung hängt von folgenden Parametern ab:  $f_\alpha$ ,  $P_E$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$ ,  $C_\infty$ . Sie ist unabhängig von  $C_E$ !
- Für  $C_\infty = C_E$  und kleine Pécletzahlen ist die allgemeine Lösung mit der des JH-Modells identisch. Je größer der Unterschied zwischen  $C_\infty$  und  $C_E$ , desto größer ist auch der Unterschied zwischen JH-Modell und allgemeinem Modell.
- Für hohe Pécletzahlen kann es in unsymmetrischen Fällen ( $k_\alpha \neq k_\beta$ ) zu einer Konzentrationsinversion vor der Front kommen.
- Auch das allgemeine Skalierungsgesetz des eutektischen Wachstums (Gleichung (7)) ist unabhängig von  $C_E$ . Es hängt neben  $f_\alpha$ ,  $P_E$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$ ,  $C_\infty$  von  $m_\alpha$ ,  $m_\beta$ ,  $(\Gamma_\alpha \cdot \sin \theta_\alpha)$ ,  $(\Gamma_\beta \cdot \sin \theta_\beta)$  und  $D$  ab. Für hohe Pécletzahlen sagt es eine Abweichung von der Konstanz des Ausdrucks  $\lambda^2 V$  voraus. Tritt eine Konzentrationsinversion auf, so existiert eine obere Grenz-Pécletzahl, oberhalb derer der Ausdruck  $\lambda^2 V$  negativ wird. Hier ist entweder die Voraussetzung einer ebenen Front oder das Prinzip der minimalen Unterkühlung nicht mehr gültig.
- Die Phasenanteile  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  können grundsätzlich nicht aus der Stoffhaltung hergeleitet werden! Vielmehr liefert die Annahme gleicher Grenzflächentemperaturen eine nicht-lineare, implizite Bestimmungsgleichung für  $f_\alpha$ . Hier ist die Kenntnis von  $C_E$  erforderlich.

### Literatur

- [1] K.A. Jackson, J.D. Hunt, Trans. Metall. Soc. AIME **236** (1966) S. 1129 ff.
- [2] L.F. Donaghey, W.A. Tiller, Mater. Sci. Eng. **3** (1968/69) S. 231 ff.
- [3] R. Trivedi, P. Magnin, W. Kurz, Acta Metall. **35** (1987) S. 971 ff.
- [4] K. Kassner, C. Misbah, Phys. Rev. A **44** (1991) S. 6513 ff.